

Sulla forma dei "friends"

Ledo Stefanini

Il profilo degli strumenti di ancoraggio in fessura conosciuti come friends è quello di una spirale logaritmica. Appare degno di nota il fatto che un oggetto con finalità esclusivamente pratiche porti il segno di riflessioni sviluppate da matematici del XVII secolo.

Chiunque abbia avuto esperienza di arrampicata in camino sa che la possibilità di rimanere in equilibrio statico (come fig. 1) dipende dalla distanza delle due pareti del camino, dalla lunghezza delle gambe, dalla qualità della superficie della roccia e, infine, dalle proprietà fisiche della suola delle scarpe.

A proposito dei primi due parametri, larghezza del camino e lunghezza delle gambe, osserviamo che sono mutuamente legati, nel senso che la posizione è tanto più stabile quanto più le gambe sono corte in relazione alla distanza tra le pareti. Per essere più precisi - stabilita l'ovvia condizione della larghezza del camino, onde non si produca la situazione estrema illustrata in fig. 2, ciò che determina l'equilibrio è l'ampiezza dell'angolo θ che la gamba forma con la parete.

Ma la possibilità di contrastare la forza peso dipende, come abbiamo osservato, per un camino dalle pareti verticali, dalla ruvidezza della parete e dalla natura delle suole. Il grado di aderenza tra le due superfici è misurato da una grandezza, priva di dimensioni fisiche, che si chiama *coefficiente d'attrito statico*, spesso indicato con la lettera greca μ . Affermare, ad esempio, che, per un certo tipo di suola ed un certo tipo di roccia il coefficiente d'attrito è del 30% ($\mu=0.3$) significa che se il piede spinge perpendicolarmente alla roccia con una forza di 100 kg, la scarpa scivola quando si applica, parallelamente alla roccia, una forza di 30 kg (fig. 3).

Il coefficiente d'attrito è quindi una misura del grado di aderenza della suola alla particolare superficie rocciosa sulla quale viene premuta. In fig. 4 vengono poste a confronto le configurazioni estreme che si possono assumere con scarpette dotate di un diverso coefficiente d'attrito.

Quanto più il coefficiente d'attrito è piccolo, tanto più la direzione della gamba deve approssimare la perpendicolare alla roccia ($\theta=90^\circ$).

I manuali di statica esprimono la condizione di equilibrio con la formula:

$$\tan \theta \geq \frac{1}{\mu}$$

che esprime in linguaggio matematico un fatto ben noto ad ogni arrampicatore: per ogni valore del coefficiente d'attrito vi è un angolo limite tra la direzione della gamba e la parete, al di sotto del quale il piede scivola (vedi tabella).

Ciò che abbiamo detto per l'alpinista vale anche per il congegno di assicurazione ideale - che chiameremo *stopper* - schematizzato nella fig. 5.

Si tratta di due aste AC e BC unite da una cerniera C alla quale è collegato il cordino di assicurazione. Un oggetto di questo genere è in grado di fare equilibrio a qualsiasi forza F (nei limiti della resistenza delle aste) a condizione che l'angolo θ sia maggiore dell'angolo limite che, come abbiamo detto, è determinato dal coefficiente d'attrito tra l'asta e la parete della fessura in cui lo stopper è inserito. Pensiamo ora di togliere lo stopper dalla fessura e di inserirlo in un'altra di minore larghezza. In questa nuova situazione le aste formano con le pareti angoli di minore ampiezza: esisterà sempre una larghezza tanto piccola che l'angolo risulterà inferiore all'angolo limite e lo stopper sarà inefficace (fig. 6).

Se vogliamo costruire uno stopper di questo genere che fornisca lo stesso grado di tenuta per fessure di larghezza variabile, è necessario far variare la lunghezza delle aste in maniera che l'angolo tra l'asta e la parete sia sempre lo stesso e, ovviamente, maggiore dell'angolo limite. Questo è ciò che si realizza con il *friend*.

Un friend si può immaginare costituito da un ventaglio di aste di larghezza diversa, disposte in modo tale che l'angolo tra ciascuna asta e la parete sia sempre lo stesso (fig. 7).

Il profilo della camme del friend è quindi caratterizzato dalla seguente proprietà: in ogni suo punto la tangente forma un angolo costante con il raggio nel punto di tangenza (fig. 8).

Nella costruzione dei friend si assume un angolo θ pari a circa 75° , che corrisponde ad un coefficiente d'attrito tra il metallo e la roccia di circa il 30% [John Wylie, *Contemplations of a Climbing Physicist*, Internet (1995)].

In termini rigorosi: indicata con α l'anomalia in radianti del raggio rispetto ad una direzione arbitraria, si richiede che

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = \rho \tan (90^\circ - \theta)$$

Integrando si ottiene

$$\log \frac{\rho}{\rho_0} = \alpha \tan (90^\circ - \theta)$$

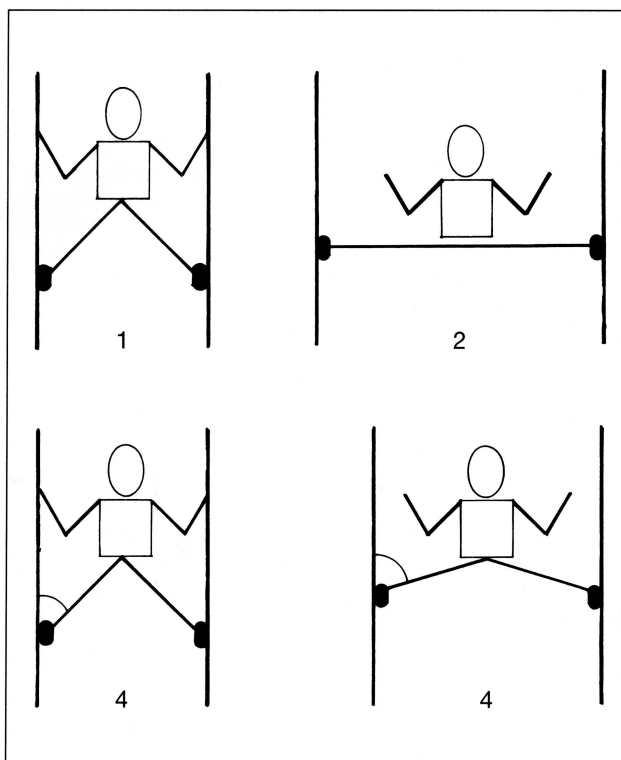
da cui

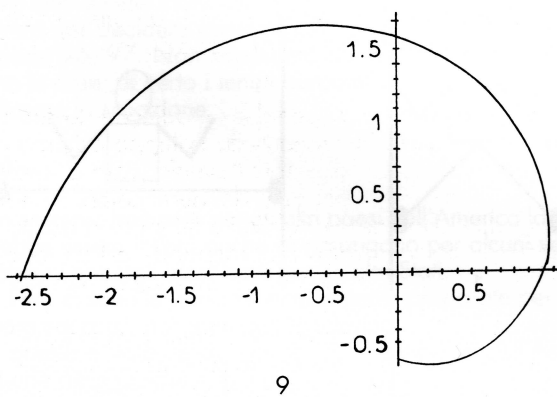
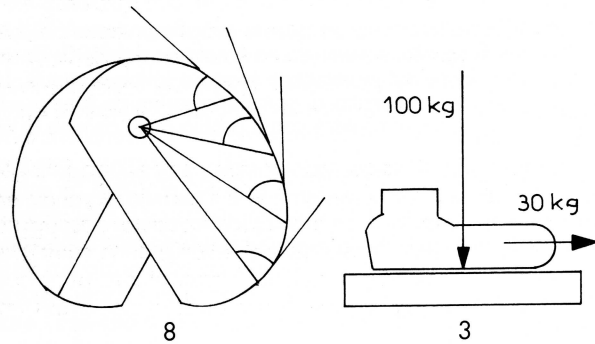
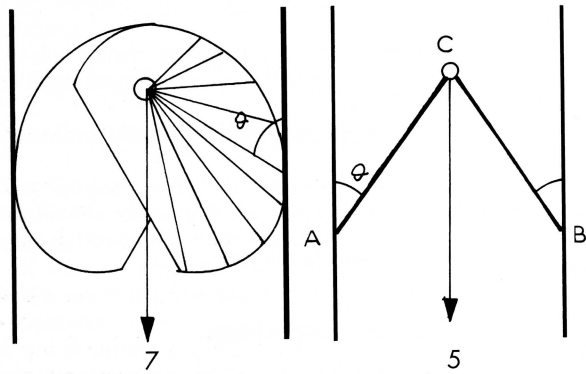
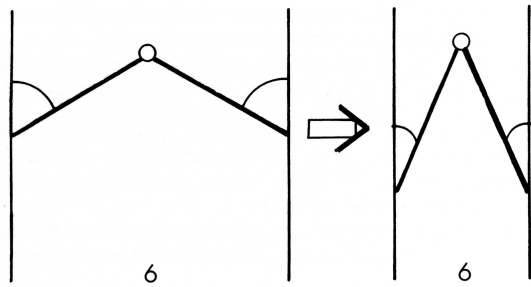
$$\rho = \rho_0 \exp [\alpha \tan (90^\circ - \theta)]$$

che è l'equazione della curva richiesta.

La curva caratterizzata da questa proprietà viene indicata con il nome di *spirale logaritmica* ed è nota fin dal '600. Fu studiata in particolare dal matematico svizzero Jakob Bernoulli. La fig. 9 rappresenta un tratto di spirale logaritmica (per $\rho_0=1$, $\theta=75^\circ$) che si può confrontare con il profilo delle camme di un friend.

Una caratteristica importante dei friend è la seguente: il profilo della camme di un friend grande è il perfetto ingrandimento geometrico di quello di un friend piccolo: questa proprietà fu scoperta da Bernoulli che la esprime con le parole: *eadem numero mutata resurgit*.





Valore del coefficiente di attrito μ	Ampiezza dell'angolo limite θ ($\tan \theta = \mu^{-1}$)
1	45°
0.8	51°
0.6	59°
0.4	68°
0.1	84°